

Prólogo

*“Il passait les nuits et les jours
A compter, calculer, supputer sans relâche,
Calculant, supputant, comptant comme à la tâche ;
Car il trouvait toujours du mécompte à son fait”*

[Pasaba las noches y los días
contando, calculando, adivinando sin descanso,
calculando, adivinando, contando como si fuera una tarea;
porque siempre encontraba un error de cálculo en sus hechos]

Jean de La Fontaine
(Le Thésauriseur et le Singe, Livre XII, Fable 3)

Este libro se inspira en una serie de cursos de diferentes naturalezas y niveles dedicados a diversos aspectos del cálculo científico. Por lo tanto, debe mucho a la motivación de los estudiantes de las universidades de Niza y Lille y de la Ecole Normale Supérieure. El estilo de redacción adoptado en este libro se basa también en la experiencia de una larga participación en el jurado de *agregación* y, en particular, en las pruebas de modelización. En efecto, una parte sustancial de los ejemplos que ilustran la aplicación de las técnicas numéricas fueron tomadas directamente de los textos publicados por el jurado del concurso (véase <http://agreg.org>) y parte de este curso sirvió de base para una serie de seminarios dictados a estudiantes en el marco de la preparación de la *agregación* marroquí. Sin embargo, algunas de las cuestiones planteadas en este libro van mucho más allá de los objetivos de estas evaluaciones. Es el caso, por ejemplo, de los tratamientos bastante detallados de los problemas de Hamiltonianos, la fina distinción entre los métodos de “diferencias finitas” y “volúmenes finitos”, o la discusión sobre problemas hiperbólicos no lineales, estos últimos siguiendo en parte un curso

realizado en el marco del IFCAM (*Indo-French Centre for Applied Mathematics*) en Bangalore. Se encontrará un conjunto de herramientas relativamente sofisticadas: este elevado nivel puede ser justificado por la importancia práctica de los problemas explorados. Proporciona una visión relevante para aquellos que quieran saber más, y los prepara para la lectura de libros más avanzados y especializados.

Los cursos de análisis numérico o de cálculo científico se consideran a menudo un poco atemorizantes. Estos temores suelen estar relacionados con el hecho de que el tema combina varias dificultades:

– los problemas que nos interesan están fuertemente motivados por un contexto de aplicación (en física, biología, ingeniería o finanzas, por ejemplo). Por lo tanto, la discusión no puede limitarse al campo puramente matemático, y la intuición está fuertemente guiada por las especificidades de la aplicación. Por lo tanto, el tema demanda una cierta cultura científica, que va más allá de la simple destreza técnica;

– El análisis numérico demanda una formación técnica muy amplia. Se trata de un tema que no puede abordarse con una caja de herramientas reducida y definida *a priori*. Por el contrario, es necesario extraer de diferentes campos de las matemáticas¹, a veces de una manera algo inesperada, por ejemplo, buscando argumentos de álgebra lineal para analizar el comportamiento de las aproximaciones numéricas de las ecuaciones diferenciales. Este aspecto un tanto confuso, sin embargo, le brinda al tema su interés;

– Por último, a menudo es difícil llegar a una evidencia o conclusión clara. Por ejemplo, si se puede demostrar que varios métodos numéricos producen una solución aproximada que efectivamente “converge” (cuando hacemos evolucionar los parámetros numéricos) hacia la solución del problema en el que estamos interesados, en la práctica algunos métodos son más apropiados que otros, sobre criterios cualitativos que no siempre son obvios de formalizar, o bien la elección del método depende de los criterios que se consideran más importantes de satisfacer para el contexto de aplicación en cuestión. Muchas preguntas tampoco tienen respuestas definitivas. A la pregunta “qué hacer”, la respuesta es a menudo “depende”: simular numéricamente un fenómeno físico complejo, mediante cálculos confiados a un ordenador, es un arte real, delicado y sutil. Este arte debe basarse en

1. La siguiente cita es bastante elocuente: “[...] en Francia, hubo incluso un esnobismo alrededor de las matemáticas puras: cuando uno identificaba un estudiante dotado, se le decía: “Debes hacer una tesis en matemáticas puras.” Por el contrario, a cualquier otro estudiante se le aconsejaba hacer matemáticas aplicadas, pensando: “Eso es todo lo que puede hacer”. Sin embargo, lo contrario es lo cierto: no se pueden hacer matemáticas aplicadas si no se sabe primero cómo hacer buenas matemáticas puras.” J.A. Dieudonné [SCH 90, p. 104].

un fuerte dominio técnico de las herramientas matemáticas y una comprensión profunda de los fenómenos físicos subyacentes.

El espíritu de este libro es enfrentar plenamente estas dificultades y, adrede, “mezclar todo”. Por ello, el libro incluye muchos enunciados clásicos de análisis y álgebra, detalles de algoritmos para resolver algunas ecuaciones, ejemplos de ciencia y tecnología, e ilustraciones numéricas. Algunas herramientas “teóricas” serán introducidas como parte del estudio de un ejemplo de aplicación, aunque esto signifique usarlas en un contexto completamente diferente. Sin embargo, el documento sigue una cierta estructura, organizada en torno a tres capítulos principales, orientados hacia las soluciones numéricas de las ecuaciones diferenciales (ordinarias o parciales). El primer capítulo trata de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias, con una amplia revisión de las bases teóricas que resultan esenciales conocer (teorema de Cauchy-Lipschitz, análisis cualitativo, problemas lineales, etc.). Detalla el análisis de los métodos clásicos (métodos de Euler explícitos e implícitos) y distingue varias nociones de estabilidad, más o menos relevantes según el contexto. Este conjunto se ilustra con una serie de ejemplos, motivados en particular por la descripción de los sistemas biológicos. Una gran sección, con un contenido técnico bastante sustancial, está dedicada al caso particular de los sistemas Hamiltonianos. El segundo capítulo trata de la solución numérica de los problemas en los límites elípticos, de nuevo con una detallada exploración de las herramientas básicas de análisis funcional. Aunque el propósito se limita esencialmente a la dimensión uno y al problema del modelo

$\lambda u(x) - \frac{\partial}{\partial x}(k(x)\frac{\partial}{\partial x}u(x)) = f(x)$ en $]0,1[$, con condiciones homogéneas de Dirichlet, diferentes familias de discretización son identificadas: diferencias finitas, volúmenes finitos, elementos finitos y métodos espectrales. Las técnicas relacionadas con la optimización también se presentan a través de la simulación de problemas complejos como la ecuación de Boltzmann-Poisson, la optimización de la carga o el problema de Stokes. El último capítulo está dedicado a las ecuaciones de evolución diferencial parcial, abordando de nuevo sólo el caso unidimensional. Detalla los problemas de estabilidad y consistencia, primero para la ecuación de calor y luego para los problemas hiperbólicos. El análisis de la ecuación de transporte y de la ecuación de onda puede considerarse como “clásico”. Por el contrario, la discusión de ecuaciones no lineales, escalares y de sistemas, con la simulación de las ecuaciones de Euler para la dinámica del gas como un propósito final, abre cuestiones más avanzadas. El libro no ofrece ningún ejercicio. Sin embargo, se invita al lector a realizar las simulaciones que ilustran el manuscrito por sí mismo. Este trabajo de experimentación numérica, jugando con parámetros numéricos y de modelización, nos permitirá desarrollar una intuición de los

fenómenos y conceptos matemáticos presentados, la cual nos ayudará a una comprensión plena del tema.

Mis colegas y colaboradores han tenido una profunda influencia en la construcción de mi paisaje matemático personal; me han hecho descubrir puntos de vista que no conocía y apreciar nociones a las que a veces admito haber permanecido cerrado durante mi formación inicial o en las primeras etapas de mi carrera. Este es el lugar para agradecerles por su paciencia conmigo y por todo lo que me han enseñado. En particular, tengo una profunda deuda con Frédéric Poupaud, Michel Rascle, como también con Stella Krell, Magali Ribot en Niza, Caterina Calgaro, Emmanuel Creusé en Lille, Virginie Bonnaillie-Noël, Frédéric Coquel, Benot Desjardins, Frédéric Lagoutière y Pauline Lafitte en París. También debo mucho a mis colegas del jurado de la *agregación*, en particular a Florence Bachman, Guillaume Dujardin, Denis Favennec, Hervé Le Dret, Pascal Noble, Grégory Vial; muchos desarrollos están directamente inspirados por nuestras apasionadas conversaciones. Por último, Claire Scheid, Franck Boyer y Sebastian Minjeaud también han tenido la amabilidad y la paciencia de releer algunos pasajes de este manuscrito; sus consejos y sugerencias han dado lugar a muchas mejoras.